Hazırlayan

Ramazan ANĞAY

Kİ-KARE TEST İSTATİSTİĞİ

1.GİRİŞ

İstatistikte değişkenler sayısal (nicel) değişkenler ve sayısal olmayan (nitel) değişkenler olmak üzere iki grupta sınıflandırılmaktadır. Günümüzde yapılan birçok araştırmada sayısal olmayan değişkenlerin dikkate alındığı gözlemlenmektedir. Örneğin, insanların medeni durumlarıyla seçtikleri meslek grupları arasındaki bir ilişki incelenmek istendiğinde, medeni durumun ve meslek grubunun rakamlarla ifade edilmesi olası değildir. Medeni durum evli, bekar, boşanmış ve dul şeklinde gösterilirken meslek grupları da serbest meslek, devlet memurluğu, işçi vb. şeklinde gruplandırılabilir.
İşte sayısal olmayan değişkenler arasındaki herhangi bir ilişkinin var olmadığını ileri sürerek (H0 hipotezi) bu hipotezin red edilip edilemeyeceğinin incelenmesinde uygulanan test Ki-Kare testi'dir. Sayılarak elde edilmiş değişkenlerin bulunduğu ve gözlenen ile beklenen karşılaştırmasının yapılacağı problemlerde, Ki- kare dağılımını esas alan tekniklerle çözümler bulunabilir

Bu teknikler;

- Ki-Kare Bağımsızlık Testi: **İki değişkenin bağımsız** olup-olmadığını,
- Ki-Kare Homojenlik Testi: **İkiden daha fazla sonuç** söz konusu ise, **gözlenen frekansların, beklenen frekanslardan farklı olup-olmadığını,**
- Ki-Kare Uygunluk Testi: Örnekleme dağılımının, **binomial, normal** veya **diğer bir dağılıma** uyup-uymadığını, belirlemede kullanılabilmektedir.

2. Kİ-KARE BAĞIMSIZLIK TESTİ

İki ya da daha fazla sınıflı iki nitel değişken arasında bağımsızlık olup olmadığını incelemek için ki-kare bağımsızlık testine başvurmak gerekir. Bu test yapılırken kontenjan tablosundan yararlanılmaktadır. Bu tablo, incelenen iki değişkenin şıklarına düşen gözlenen frekansların yazıldığı, satırlar ve sütunlardan oluşan, çift yönlü tablodur. Bağımsızlık testinde kullanılan çift yönlü tabloyu aşağıdaki gibi sunabiliriz:

1.Değişkenin şıkları	**2.Değişkenin şıkları**						
	SINIFLAR						
SINIFLAR	1	2	…	j	…	c	TOPLAM
1	Q_{11}	Q_{12}	…	Q_{1j}	…	Q_{1c}	$n_{1.}$
2	Q_{12}	Q_{22}	…	Q_{2j}	…	Q_{2c}	$n_{2.}$
…	…	…	…	…	…	…	…
İ	Q_{i1}	Q_{i2}	…	Q_{ij}	…	Q_{ic}	$n_{i.}$
…	….	…	…	…	…	…	…
R	Q_{r1}	Q_{r2}	…	Q_{rj}	…	Q_{rc}	$n_{r.}$
TOPLAM	$n_{.1}$	$n_{.2}$	…	$n_{.j}$	…	$n_{.c}$	n

Gözlenen frekansların bulunduğu bu tablodan yararlanarak, beklenen frekansları da hesaplayabiliriz. Bir hücrenin beklenen frekansını; o hücrenin bulunduğu satırın toplam frekansıyla, sütununun toplam frekansını çarpıp, genel toplama bölerek elde ederiz.
Örneğin 2. satır 1. sütundaki hücrenin beklenen frekansı

$$E_{21} = \frac{R_2 C_1}{n} = \frac{Row(satıa)_2 Column(sütun)_1}{n(genel\_toplam)}$$

2.1. Bağımsızlık Testi Aşamaları

1.Aşama: Hipotezlerin İfade Edilmesi
H0: Sınıflandırma kriterleri birbirinden bağımsızdır.
H1: Sınıflandırma kriterleri birbirinden bağımsız değildir.

2.Aşama: İstatistiksel Test
İki sayısal olmayan değişken arasındaki ilişkinin varlığını araştıran bir test olan ki-kare bağımsızlık testi olmalıdır.

3.Aşama : Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

4.Aşama: H0'ın Red Bölgesinin Belirlenmesi
Bunun için hesaplanan test istatistiği, belli bir anlamlılık düzeyine ve serbestlik derecesine göre ki kare tablosundan bulunan kritik değer ile karşılaştırılır.
Eğer hesaplanan ki kare test istatistiğinin değeri tablodan bulunan kritik değerden büyük çıkarsa H0 red edilecektir.

5.Aşama: Test istatistiğinin Hesaplanması
Test istatistiğini aşağıda yer alan formülle elde edilir.
Burada O (observed frequency) gözlenen frekans; E (expected frequency) beklenen frekansı işaret etmektedir.

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})}{E_{ij}}$$

formülü ile hesaplanır.

Test istatistiğinin hesaplana bilmesi için öncelikle beklenen frekansların hesaplanması gerekmektedir. Herhangi bir gözenin beklenen frekansı bulunurken o gözenin yer aldığı satır toplam frekansıyla sütunun toplam frekansı çarpılıp genel toplam frekansa bölünmektedir.

6.Adım: İstatistiksel Karar
İstatistiksel karar verilirken red bölgesinin tanımı gereği hesaplanan test istatistiğinin değeri tabloda bulunan test istatistiğinden büyükse H0 red edilir.

Eğer hesaplanan test istatistiği tabloda bulunan test istatistiğinden küçükse H0 rededilemez.
Sıfır hipotezinin kabul edilmesi değişkenlerin birbirinden bağımsız olduğu (diğer bir ifadeyle değişkenler arasında bir ilişki bulunmadığı) anlamını taşır.

Örnek:
Yapılan bir araştırmada katılımcıların eğitim düzeyleri ve sigara içme alışkanlıkları sorgulanarak bu iki değişken arasında bir bağıntı bulunup bulunmadığı, diğer bir ifadeyle iki değişkenin birbirinden bağımsız olup olmadığı belirlenmeye çalışılsın. Bu amaçla 300 kişiyi kapsayan bir örneklem üzerinde yapılan gözlem sonuçları aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

Sigara içme alışkanlığı	**Eğitim düzeyi**			
	İLK	ORTA	YÜKSEK	**TOPLAM**
Sigara içiyor	45	55	40	140
Sigara içmiyor	45	65	50	160
TOPLAM	**90**	**120**	**90**	**300**

Sigara içme alışkanlığına ilişkin eğitim düzeyinin etkili olup olmadığını **α=0.01** anlamlılık düzeyinde araştırınız?
Çözüm:
Tabloda yer alan sayılar gözlenen frekanslardır. Sigara içme alışkanlığı üzerinde eğitim düzeyinin etkisi olup olmadığını test edebilmek için(bağımsızlık testini yapabilmek için) izlenmesi gereken adımları sırasıyla yerine getirelim.
1. Adım: Hipotezlerin ifade edilmesi
H0 : Sigara içme alışkanlığı ile eğitim düzeyi birbirinden bağımsız değişkenlerdir. Bu iki değişken arasında bir ilişki yoktur.
H1 : Sigara içme alışkanlığı ile eğitim düzeyi arasında bir ilişki(bağıntı) vardır.

2. Adım: İstatistiksel Test
İki sayısal olmayan değişken arasındaki ilişkinin varlığını araştıran bir test olan bağımsızlık testi olmalıdır.

3. Adım: Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi
α=0.01 olarak belirlenmiştir.

4.Adım: H0'ın red bölgesinin belirlenmesi
Bunun için hesaplanan test istatistiği, belli bir anlamlılık düzeyine ve **v=(r-1)(c-1)** serbestlik derecesine göre ki-kare değerleri tablosundan bulunan kritik değer ile karşılaştırılır.
Örneğimiz için serbestlik derecesi **v= (2-1)(3-1)=2** olup **α=0.01** düzeyinde ki-kare tablosundan bulunan **kritik değer 9,21**'dir.
Eğer, hesaplanan ki kare test istatistiğinin değeri tablodan bulunan değerden büyük çıkarsa sıfır hipotezi red edilecektir.

5. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması
Örneğimiz için beklenen frekansları ilk gözeden başlamak üzere sırasıyla hesaplayalım:

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})}{E_{ij}}$$

O= Gözlenen frekans
E= Beklenen frekans

E11=(Birinci satır toplamı x birinci sütun toplamı)/ (genel toplam)
E11= (140 x 90)/300=**42**
E12=(Birinci satır toplamı x ikinci sütun toplamı)/ genel toplam
E12=(140 x 120)/300=**56**
E13=(140 x 90)/300=**42**
E21=(160 x 90)/300=**48**
E22=(160 x 120)/300=**64**
E23=(160 x 90)/300=**48**

Aynı yöntemle hesaplanan beklenen frekansları ve gözlenen frekansları kontenjans tablosunda görelim.

Sigara içme alışkanlığı	**Eğitim düzeyi**						
	İLK		ORTA		YÜKSEK		
	O	E	O	E	O	E	**TOPLAM**
Sigara içiyor	45	42	55	56	40	42	140
Sigara içmiyor	45	48	65	64	50	48	160
TOPLAM	**90**		**120**		**90**		**300**

$$x^2 = (45-42)^2/(42)+(55-56)^2/(56)+(40-42)^2/(42)+(45-48)^2/(48)+(65-64)^2/(64)+(50-48)^2/(48)$$

= 0.58

6.Adım: İstatistiksel karar:

İstatistiksel karar verilirken red bölgesinin doğası gereği, $x^2_{hes} > x^2_t$ olduğundan sıfır hipotezi red edilir.
$x^2_{hes} < x_{2t}$ olduğunda ise sıfır hipotezi reddedilemez.
Sıfır hipotezinin reddedilmesi değişkenlerden birbirinden bağımsız olduğu (yani değişkenler arasında bir ilişki bulunmadığı) anlamını taşır. Buna göre örneğimizde;
$x^2_{hes} = 0.58$ $x^2_t = 9.21$
$x^2_{hes} < x^2_t$ olduğu için,

H0 hipotezi kabul edilir. Yani sigara içme alışkanlığı ile eğitim düzeyi arasında anlamlı bir ilişki yoktur.

2.2. Kİ-KARE HOMOJENLİK TESTİ

Homojenlik testi ana çizgileriyle iki ya da daha fazla bağımsız örneklemenin aynı ana kütleden seçilip seçilmediğinin araştırılmasında kullanılan bir tekniktir. Testin uygulanması ki-kare bağımsızlık testinde olduğu gibidir.
Yine nitel değişkenlerle ve aynı örneklem isteğiyle çalışır.
Ancak dikkat edilmelidir ki bağımsızlık testinde ele alınan değişkenler arasında bir ilişkinin varlığı araştırılırken, homojenlik testinde iki yada daha fazla örneklemin aynı evrenden seçilip seçilmediği araştırılmaktadır.

Örnek:
İzmir, Aydın ve Denizli illerindeki tüketicilerin taze sebze-meyve satın alma yeri tercihleri aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

	Satın Alma Yerleri			
	Yerel pazar	**Manav**	**Süper/Hiper Market**	**Toplam**
İzmir	72	45	50	167
Aydın	42	35	20	97
Denizli	65	24	45	134
Toplam	179	104	115	398

Buna göre ele alınan 3 ildeki taze sebze-meyve alışveriş yeri tercihlerinin aynı olup-olmadığını 0,01 anlamlılık düzeyinde, ki kare testiyle belirleyeliniz?
Çözüm:
Hipotezlerimiz:
H0: 3 ilin taze sebze-meyve satın alma yeri tercihleri aynıdır.
H1: 3 ilin taze sebze-meyve satın alma yeri tercihleri farklıdır.

Beklenen Değerler:

İl	**Satın Alma Yerleri**			
	Yerel pazar	**Manav**	**Süper/Hiper Market**	**Toplam**
İzmir	(167*179)/ 398=75,11	(167*104)/398= 43,64	(167*115)/398=48,25	**167**
Aydın	(97*179)/398= 43,63	(97*104)/398= 25,35	(97*115)/ 398=28,03	**97**
Denizli	(134*179)/398= 60,27	(134*104)/398= 35,02	(134*115)/398=38,72	**134**
Toplam	**179**	**104**	**115**	**398**

Gözlenen ve beklenen değerleri (parantez içinde) aynı tablo üzerinde gösterelim;

İl	**Satın Alma Yerleri**			
	Yerel pazar	**Manav**	**Süper/Hiper Market**	**Toplam**
İzmir	72 (75,11)	45 (43,64)	50 (48,25)	**167**
Aydın	42 (43,63)	35 (25,35)	20 (28,03)	**97**
Denizli	65 (60,27)	24 (35,02)	45 (38,72)	**134**
Toplam	**179**	**104**	**115**	**398**

Ki kare değerini hesaplayalım:

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})}{E_{ij}} = \frac{(72-75{,}11)^2}{75{,}11} + \frac{(45-43{,}64)^2}{43{,}64} + \frac{(50-48{,}25)^2}{48{,}25} + \ldots + \frac{(45-38{,}72)}{38{,}72}$$

$$\chi^2 = 11{,}13$$

Kritik değerimiz:

α=0.01 sd=(3-1)(3-1)=4 için x^2_t değeri:
x^2_t = **13,2767**
Hesapladığımız değer:
x^2_{hes} =**11,13**
$x^2_{hes} < x^2_t$ olduğundan; **H0 hipotezi kabul edilir**.

Kararımız:
Ele alınan 3 ilde tüketiciler, taze sebze-meyve satın alma yeri konusunda benzer tercihler göstermektedir.

2.3. Kİ-KARE UYGUNLUK TESTİ

Uygunluk testinin esası, n hacimli(birimlik) bir örneklemenin anakütleyi temsil edip edemeyeceğini araştırmak oluşturur.
Uygunluk testinde bir veri setinin istatistiksel yapıya iyi uyum gösterip göstermediği sınanır.
Testin nasıl yapılacağı, özellikle beklenen frekansların nasıl hesaplanacağı, örnek yardımıyla açıklamaya çalışalım.

Örnek:
Bir üniversitede ortak ders olarak tüm fakültelerde verilen ingilizce dersini alan ve başarılı olan öğrencilerden rassal olarak seçilen 150 öğrencinin fakültelere dağılımı aşağıda verilmiştir.

FAKÜLTELER	BAŞARILI
İktisadi Ve İdari Bilimler Fakültesi	24
Fen Fakültesi	28
Mühendislik Fakültesi	30
Hukuk Fakültesi	20
Eğitim Fakültesi	26
İletişim Fakültesi	22

Bu verilere göre fakülteler için ingilizce dersi başarısının aynı oranda olup olmadığının **α= 0.01** anlamlılık düzeyinde araştırınız?

Çözüm:
1. Adım: Hipotezlerin oluşturulması:
H0= Tüm fakülteler için ingilizce dersinin başarı oranları aynıdır.(İngilizce başarısında fakülteler açısından bir farklılık yoktur.)
H1= En az bir fakülte için İngilizce dersinin başarı oranı farklıdır.

2. Adım: İstatistiksel Test
x^2 uygunluk testi

3. Adım: Anlamlılık Düzeyi
α= 0.01

4. Adım: H0'ın Red Bölgesinin Belirlenmesi
Red bölgesi hesaplanan x^2 değerinin öngörülen anlamlılık düzeyi ve belirlenen serbestlik derecesine göre x^2 tablosundan kritik değeriyle karşılaştırılarak belirlenir. k sınıf sayısını belirtmek üzere serbestlik derecesi **v= k-1** den; **6 sınıf** olduğu için **6-1= 5** olarak belirlenir.
Sd=5 ve **α= 0.01** anlamlılık düzeyi için kritik değerimiz
x^2 tablosundan 15.08 olarak bulunur.
Red bölgesi **x^2_{hes} > 15.08** olarak belirlenir.

5.Adım: Ki- Kare İstatistiğinin Belirlenmesi
Sıfır hipotezinde tüm fakülteler için ingilizce dersinin başarı oranlarının aynı olduğu ileri sürüldüğü için **altı farklı fakülte için genel oran 1/6** olacaktır. Dolayısıyla **her fakülte için beklenen frekans 150.(1/6)=25** olur.
Bunun anlamı fakülteler arasında başarı oranı açısından farklılık olmadığı ve her fakülteden 25 öğrencinin başarılı olmasının beklenmesidir.

FAKÜLTELER	**BAŞARILI**	
	O	**E**
İktisadi Ve İdari Bilimler Fakültesi	24	25
Fen Fakültesi	28	25
Mühendislik Fakültesi	30	25
Hukuk Fakültesi	20	25
Eğitim Fakültesi	26	25
İletişim Fakültesi	22	25

Test istatistiği:

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})}{E_{ij}}$$

$$\mathbf{x^2 = (24-25)^2/(25)+(28-25)^2\ /\ (25)+\ (30-25)^2/(25)+(20-25)^2/(25)\ +(26-25)^2/(25)+(22-25)^2\ /\ (25)=2.8}$$

olarak elde edilir.

6.Adım: İstatistiksel Karar

$\mathbf{x^2_{hes} = 2.8}$
$\mathbf{x^2_t}$ = 15.08 olarak bulunulmuştur.
Bu sonuçlara göre $\mathbf{x^2_{hes}} < \mathbf{x^2_t}$ olduğundan; **H0 kabul** edilecektir. Yani bu üniversitenin tüm fakülteleri için ingilizce dersinin başarı oranları arasında önemli bir farklılık yoktur.

KAYNAKLAR

1. Şıklar E. (2013). İstatistik-2, Açık Öğretim Fakültesi Yayını, Ankara.

2. Miran, B. (2013). Temel İstatistik, İZMİR.